Oona Leganovic

Symmetrie und Ordnung

Buckminster Fullers eigenwillige Ideen im Spiegel der Geschichte der Untersuchung und Interpretation mehr oder minder regelmäßiger Polyeder

„Lange bevor es Menschen auf dieser Erde gab, wuchsen in der Erdkruste all die Kristalle. Eines schönen Tages sah ein Mensch das erste Mal solch ein glitzerndes Stück Regelmäßigkeit liegen; oder vielleicht schlug er mit seiner Steinaxt drauf; es brach auseinander und fiel ihm vor die Füße; er las es auf und besah es in seiner offenen Hand – und wunderte sich. Es liegt etwas Atemberaubendes in den Grundgesetzen der Kristalle. Sie sind keine Schöpfungen des menschlichen Geistes. Sie >sind< - sie existieren unabhängig von uns. In einem Moment der Klarheit kann der Mensch höchstens entdecken, daß es sie gibt und sich Rechenschaft davon geben.“[1]

M.C. Escher

Einleitung

Die regelmäßigen Polyeder wurden im Laufe der Zeit von den Menschen unter verschiedenen Gesichtspunkten betrachtet, untersucht, und zur Deutung der Welt herangezogen. Verschiedene Wissenschaften haben verschiedene Blickwinkel, und das Bild, das sich die Menschen von der Welt machen, unterscheidet sich von Epoche zu Epoche, in letzter Zeit verstärkt auch von Mensch zu Mensch. Ich versuche nun einen kurzen Abriss über die Behandlung und die Rolle der regelmäßigen Polyeder in der Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaft zu geben, wobei ich das Hauptgewicht auf diejenigen Gebiete lege, die zu einer systematischen Beschäftigung mit regelmäßigen und halbregelmäßigen Körpern geführt haben – Geometrie bzw. Mathematik, zeitweise die Astronomie, und die Kristallographie – und diejenigen, in denen sie zwar auftauchen, aber eher als etwas kuriose Randerscheinungen betrachtet werden – wie z.B. die Biologie – nur streife. Ich interessiere mich mehr für die Geschichte, in der die spezifischen Ansätze deutlich werden, und weniger für die neueren Entwicklungen dieser Gebiete, die den Rahmen dieser Hausarbeit sprengen würden und gegenwärtig meinen Horizont übersteigen. Im Anschluss fasse ich Platons berühmte Interpretation der regelmäßigen Polyeder als Grundbausteine der Welt zusammen und deute die mit ihr zusammenhängenden Vorstellungen von Platon über die Welt, den Raum, die Ordnung und die Bewegung an, erkläre die Rolle, die Kepler ihnen in seinem Weltmodell zumaß, und gebe eine zusammenfassende Darstellung dessen, was R. Buckminster Fuller *Synergetics* nannte. Ich habe Fuller besonders viel Platz eingeräumt, da seine Anschauungen relativ unbekannt sind, ich nicht wie bei den anderen Akteuren davon ausgehen kann, dass die Grundlagen geläufig sind, und sie eine Sonderrolle zwischen Wissenschaft und philosophischer Welterklärung einnehmen. Er schreibt den Polyedern eine sehr prominente Rolle zu und betrachtet sie unter tatsächlich neuen Aspekten, fällt aber aus dem Rahmen des Wissenschaftsbetriebes und hat recht eigenwillige Vorstellungen von Wissenschaft im Allgemeinen und der Geometrie im Besonderen. Zuletzt setze ich Fullers Ansichten in Beziehung zum Ursprung der Mathematik im antiken Griechenland und den verschiedenen modernen Anschauungen über den Zusammenhang zwischen Geometrie und physikalischer Welt, denn diese bilden sozusagen den Hintergrund, vor dem die Untersuchung der Polyeder betrieben wurde.

[1] Bruno Ernst, Der Zauberspiegel des M.C. Escher, Berlin 1986, S.93

1.0 Die regelmäßigen Polyeder in der Geschichte der exakten Wissenschaft

1.1 Euklid

Die schriftlich überlieferte Geschichte wissenschaftlicher Betrachtungen der regelmäßigen Polyeder beginnt mit Euklids *Elemente.* Natürlich waren manche dieser Körper schon vorher bekannt, aber die Erkenntnis eines Zusammenhangs zwischen ihnen, die Definition von Regelmäßigkeit und ein Beweis, warum es keine weiteren geben kann, wird erst Theaetetus zugeschrieben[2]; es soll auch seine Behandlung des Gebiets sein, die durch Euklid überlebt hat. Diese Darstellung der Geometrie, die heute, nachdem auch andere entdeckt worden sind, die euklidische genannt wird, gilt als beispielhaft für das mathematische Denken; von einigen wenigen Axiomen wird das gesamte Korpus an Sätzen abgeleitet, immer nach dem Schema Definition, Satz, Beweis. Euklid wurde deshalb lange als eine sehr gelungene Einführung in die Mathematik betrachtet.[3]

Der die regelmäßigen Polyeder behandelnde Teil der *Elemente*, das XIII. Buch, enthält einige zur Konstruktion notwendige Vorarbeiten und beschäftigt sich dann erst der Reihe nach mit den einzelnen Körpern - sie werden konstruiert, mit einer Kugel umschlossen, ihre Kantenlänge wird mit dem Durchmesser dieser Außenkugel (Circumsphäre) verglichen, wobei festgestellt wird, dass dieses Verhältnis bei Ikosaeder und Dodekaeder ein irrationales ist - und anschließend wird behauptet, „dass sich außer den besprochenen fünf Körpern kein weiterer Körper errichten lässt, der von einander gleichen gleichseitigen und gleichwinkligen Figuren umfasst würde."[4] Der Beweis wird über die Winkel der zur Konstruktion verwendeten Polygone bzw. Seitenflächen geführt; erst wird festgestellt, dass sich aus zwei ebenen Flächen keine Ecke errichten lässt, und dass die Summe der an einer („verwendbaren") Ecke anliegenden Winkel kleiner als vier rechte Winkel sein muss. Dann wird gezeigt, dass für jedes regelmäßige Polygon, das mehr Seiten hat als ein Pentagon, das Dreifache des Winkels einer Ecke größer oder gleich vier rechten Winkeln ist.[5]

Danach schwand für einige Zeit das Interesse an regelmäßigen Körpern, ob Archimedes tatsächlich die halbregelmäßigen „Archimedischen" Körper entdeckt hat, ist nicht sicher.[6] Erst als in der Renaissance die alten griechischen Mathematiker wieder gelesen wurden, wurde auch diesem Gebiet der Geometrie wieder mehr Aufmerksamkeit gewidmet; die impliziten Annahmen in Euklids Beweis wurden deutlich. Dies führte zur Entdeckung

---

[2] "Theaetetus created the prototype of a mathematical theory; starting from a significant example, the dodecahedron, he proceeds to a general concept, and manages to classify all objects satisfying the definition."
Benno Artmann, Euclid – The Creation of Mathematics, New York 1999, S.309

[3] „Euclid's work will live long after all the textbooks of the present day are superseded and forgotten." Sir Thomas L. Heath, zitiert nach: Coxeter, H.S.M., Unvergängliche Geometrie, übers. von J.J. Burckhardt, Basel/Stuttgart 1963, S.15

[4] Euklid, Die Elemente: Bücher I – XIII, aus dem Griech. übers. und hrsg. von Clemens Thaer, Frankfurt am Main 1996 (Nachdruck)

[5] "Euclid's treatment of the regular polyhedra is especially important for the history of mathematics because it contains the first example of a major classification theorem."
Artmann, S.296

[6] „Die 13 Archimedischen Körper wurden zuerst von Archimedes in einer nicht mehr erhaltenen Schrift dargestellt. Kenntnis von diesen Archimedischen Körpern hatte Kepler durch die Übersetzung des Pappus von 1588 und kommentierte diese in der Weltharmonik."
Helmut Reis, Das Paradoxon des Ikosaeders, Bonn 2002, S.20
„Pappus' description of the Archimedean solids as figures 'contained by equilateral and equiangular, but not similar, polygons' is insufficient to characterise them."
Peter Cromwell, Polyhedra, Cambridge 1997, S.86

weiterer Polyeder sowie zu verschiedenen Ergänzungen seiner Regelmäßigkeitsdefinition auf solch eine Weise, dass ihr tatsächlich nur die fünf platonischen Körper genügen.

1.2 Kepler

Kepler beschäftigte sich als einer der ersten wieder eingehend mit der Geometrie dieser Körper: 1611 veröffentlichte er die Beschreibung zweier Rhombenkörper, des Rhombendodekaeders und des Rhombentriakontaeders, die sich dadurch auszeichnen, aus gleichen gleichseitigen, aber nicht gleichwinkligen Flächen zu bestehen. Da sie mehr als eine Art von Ecken besitzen, ist es nicht möglich, ihnen eine Außenkugel umzubeschreiben, da ihre Flächen aber gleich sind, kann man ihnen eine Innenkugel einbeschreiben.[7] Mit seiner *Harmonice Mundi* von 1619 lieferte er dann die erste schriftlich überlieferte vollständige Herleitung der 13 Archimedischen Körper und stellte fest, dass die Beschreibung von Pappus außer auf die Archimedischen Körper auch auf Prismen und Antiprismen – Körper begrenzt wie Prismen von zwei parallelen kongruenten Seitenflächen, verbunden im Gegensatz zu jenen aber mit gleichschenkligen Dreiecken statt mit Rechtecken - zutrifft; er war der erste, der die Antiprismen beschrieb. Seine Definition der Archimedischen Körper grenzt diese auch von Prismen und Antiprismen ab: Neben den überlieferten Bedingungen, dass die Seitenflächen regelmäßig sein, alle Ecken auf ein und derselben Außenkugel liegen und gleich sein müssen, fordert er, dass die Anzahl der verwendeten Polygone einer Art gleich der Seitenzahl eines der Platonischen Körper sein müsse. Aber auch zwei der Archimedischen Körper selbst genügen nicht dieser Definition. Es hätte ausgereicht darauf zu bestehen, dass jedes verwendete Polygon mindestens drei Mal vorkommen muss.[8]
Kepler war auch einer der Ersten, der weitere Körper entdeckte, die Euklids Definition von Regelmäßigkeit gehorchen: wenn man ein Polygon als eine geschlossene Reihe von Kanten betrachtet, deren sich jeweils zwei an einem gemeinsamen Endpunkt treffen, können ein Pentagramm und ähnliche Flächenformen ebenfalls als regelmäßige Polygone betrachtet werden, da sie gleichseitig und gleichwinklig sind. Solange die Möglichkeit, dass sich die Seiten schneiden, nicht ausdrücklich ausgeschlossen wird, ist sie für die Frage der Regelmäßigkeit nicht von Belang. Kepler konstruierte zwei Körper, sogenannte Sternpolyeder, die man als aus Pentagrammen bestehend betrachten kann – oder als aus Dreiecken zusammengesetzt.[9] Wie bereits gesagt gehorchen sie Euklids Definition von Regelmäßigkeit, ihnen kann auch ebenfalls eine Außenkugel umschrieben werden, aber im Gegensatz zu den fünf platonischen Körpern sind sie nicht konvex – Konvexität definiert als die Eigenschaft, dass man jeden beliebigen Punkt des betreffenden Körpers mit jedem anderen Punkt des Körpers mit einer geraden Linie verbinden kann, ohne dass diese Linie sich auch nur an einem Punkt außerhalb des Körpers selbst befände. Kepler umging es, sie den Platonischen Körpern gleichzustellen, und bezeichnete sie als kaum mehr als auf regelmäßige Art und Weise erweiterte Dodekaeder, was der Art und Weise entspricht, wie er sie konstruiert hat.
Viele Jahre später ging Poinsot (1777-1859), sich der Arbeit Keplers nicht bewusst, einen Schritt weiter. Er erkannte die unausgesprochene Annahme der Konvexität als Definitionslücke und konstruierte außer Keplers noch zwei weitere Körper, die durch diese Lücke schlüpfen.[10]

[7] Johannes Kepler, Vom sechseckigen Schnee – Strena seu de Nive sexangula (1611), übers. und hrsg. von Dorothea Götz, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften 273, Leipzig 1987 (Nachdruck)
[8] Cromwell, S.157f.
[9] Banko Grünbaum, Regular Polyhedra, in: Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences Vol. 2, hrsg, von Ivor Grattan-Guinness, London 1994, S.868 f.
[10] Cromwell, S.172, 251

1.3 Descartes, Euler

Descartes war ca.1630 der erste, der sich mit Polyedern im Allgemeinen beschäftigte und nicht nur mit den Eigenschaften einzelner oder bestimmter Gruppen – mit einer Einschränkung: auch seine Überlegungen beschäftigten sich nur mit konvexen Körpern, ohne dass ihm selbst diese Einschränkung bewusst gewesen zu sein scheint. Das wichtigste Theorem aus seiner Schrift *De Solidorum Elementis*[11] besagt, dass die Summe der Winkel der Seiten eines konvexen Polyeders immer gleich der Anzahl der Ecken mal 360° weniger 720° ist.
Aber Descartes' Schrift wurde nicht veröffentlicht, erst ca. 150 Jahre später in einer Kopie wieder entdeckt und hatte keinen wesentlichen Einfluss auf die Entwicklung der Mathematik. Mit seinem Theorem über den Zusammenhang der Anzahl der Kanten, Flächen und Ecken brachte als nächster Euler 1750 ein neues Element in die Geometrie der Körper ein: die Kante als die Linie, an der sich zwei aneinandergrenzende Flächen treffen. Dies ermöglichte es ihm, zwischen den Seiten der Flächen eines Körpers und seinen Kanten zu unterscheiden. Das Theorem besagt, dass die Anzahl der Ecken eines Polyeders plus die Anzahl der Seiten gleich der Anzahl der Ecken plus zwei ist.[12]Auch hier sind wieder konvexe Polyeder gemeint. In dieser Schrift stellt Euler fest, dass diese drei Elemente der Begrenzung (Ecke, Kante und Seitenfläche) einen Körper vollständig bestimmen, und legt damit den Grundstein zur Topologie. Gut hundert Jahre später (1858) schrieb Poinsot:
„Was die Theorie der Polyeder sehr erschwert, ist der Umstand, dass man eine grundsätzlich neue Wissenschaft benötigt, um sie zu betreiben. Eine Wissenschaft, die man ‚Geometrie der Lage' nennen könnte, weil sie sich nicht hauptsächlich mit der Größe oder dem Verhältnis von Figuren, sondern mit der Ordnung und Lage der Elemente, aus denen sie bestehen, beschäftigt."[13]

1.4 Topologie

Nach Euler begann sich eine abstraktere Sichtweise auf Polyeder durchzusetzen: Anstatt sie als 'gefüllte Körper' zu betrachten, brachte die Verschiebung des Schwerpunktes von Messungen des Volumens und Erforschung der Möglichkeiten der Einbe- und Umschreibung verschiedener Körper hin zur Betrachtung der Eigenschaften ihrer Oberfläche eine Wahrnehmung der Polyeder als hohl und im wesentlichen aus ihrer Oberfläche bestehend mit sich, die die Polyeder im Extremfall (wie z.B. bei Buckminster Fuller) sogar auf eine Art Gerüst, nur aus Kanten und Ecken bestehend, reduzierte.[14] Dies führte auch zu neuen Darstellungsweisen: die Beschreibung durch Schläfli-Symbole[15], die durch die Angabe der Anzahl s der Seiten der Flächen, aus denen ein Körper besteht, und die Anzahl f der Flächen, die sich an einer Ecke treffen, einen Körper in der Form {s,f} charakterisieren und die Schlegel-Diagramme, die konvexe Polyeder durch die Projektion ihrer Kanten und Ecken auf eine ihrer Seiten darstellen und damit ein besonderes Augenmerk auf qualitative Eigenschaften der Polyder legen. Inzwischen ist die Betrachtung regulärer Polyeder zu einem

---

[11]Pasquale Joseph Federico, Descartes on Polyhedra – A Study of the *De Solidorum Elementis*, New York 1982, S.44
[12] Federico, S.65
[13] zitiert nach Cromwell, S.206; hier auch eine eingehendere Darstellung der Definitionsprobleme, die sich an Eulers Theorem anschlossen, und verschiedene Beweise (S.189ff.)
[14] Auch Kepler behandelte Polyeder auf diese Weise.
[15] „Ludwig Schläfli (1814-1895), hat die Eulerscher Polyederformel auf mehrdimensionale Räume verallgemeinert und in diesen Räumen die platonischen Körper klassifiziert."
Reis, S.120

Sonderfall der Topologie geworden, die sich längst auch mit ‚Gebilden' als ‚regelmäßigen Mannigfaltigkeiten' in n-dimensionalen und nichteuklidischen Räumen beschäftigt.

1.5 Kristallographie

In der Kristallographie vollzog sich relativ unabhängig eine ganz andere Entwicklung: Hier wurde gerade auch den Möglichkeiten der Zusammensetzung der Polyeder als massiven Körpern aus kleinsten Körpern besondere Aufmerksamkeit geschenkt. Pionier dieser Forschung war René Just Haüy (1743-1822), Professor der Mineralogie in Paris, der die in Kristallen vorgefundenen Formen und ihre spezifischen Abweichungen von den entsprechenden geometrischen Körpern durch die Theorie vom Aufbau aus kleinsten ‚Spaltkörperchen' erklärte[16]. Zwar war die Idee von den kleinsten Teilchen allgemein nicht neu, und auch als Erklärung der Formen der Kristalle war sie schon vorgebracht worden[17], aber Haüy arbeitete sie zu einer wissenschaftlichen Theorie aus: Er erarbeitete ein System aus sechs Bausteinen, aus deren dichter Packung sich sowohl die ‚einfachen Grundformen' als auch durch Abstufungen die ‚sekundären Formen' der Kristalle erklären lassen sollten. Da Haüy von ganzen zählbaren gleichgroßen kleinsten Bestandteilen der Kristalle ausging, bemerkte er, dass die bei Kristallen vorkommenden Formen, die an regelmäßige Dodekaeder und Ikosaeder erinnern, mit den entsprechenden geometrischen Figuren nicht übereinstimmen können, da sich mit solchen Bestandteilen keine irrationalen Verhältnisse bilden lassen. Seine Dekreszenztheorie enthielt bereits die Forderung nach rationalen Achsenabschnitten sowie die Feststellung, dass Kristalle, die aus den gleichen Spaltkörperchen bestehen, bei gleicher Symmetrie verschiedene Formen (‚Kristalltrachten') annehmen können.
Die Betrachtung der Kristallsymmetrien wurde von Johann F.C. Hessel (1796-1872) weiter ausgeführt; er stellte fest, „dass sich Symmetriebeziehungen durch Symmetrieachsen kennzeichnen lassen" und wies nach, „dass an Kristallen nur 2-, 3-, 4- und 6-zählige Symmetrieachsen auftreten können"[18]. Er beschrieb die 32 Symmetrieklassen und bediente sich bei der Beschreibung der Körper gewissermaßen eines topologischen Stils, während Karl Friedrich Naumann (1797-1873) eine Koordinatentheorie ausarbeitete, die eine rein morphologische Beschreibung von Kristallkörpern ermöglicht und 18 ‚Bausteine' der Kristalle ableitete. Probleme mit Haüys Theorie führten dazu, dass die Vorstellung von diesen Kristallbausteinen modifiziert wurde; Gabriel Delafosse (1796-1878) schlug vor, sie durch polyederartige Moleküle mit kugelförmigen Atomen an den Ecken zu ersetzen, und 1849 erschien eine Schrift von Auguste Bravais (1811-1863), in der dieser sich, der Arbeit Hessels nicht bewußt, intensiv mit Problemen der Symmetrie beschäftigte, Symmetrieachsen, -ebenen und –punkte definierte sowie zwischen Haupt- und Nebensymmetrieachsen unterschied, mögliche Kombinationen von Symmetrien betrachtete und fast alle Symmetrieklassen der Polyeder auflistete. Danach untersuchte er die Symmetrien regelmäßig im Raum angeordneter Punkte und stieß auf sieben verschiedene Gittersysteme: das kubische, das hexagonale, das tetragonale, das rhombohedrische (oder trigonale, das später auf das hexagonale zurückgeführt wurde), das orthorhombische, das monoklinische und das triklinische, die er später nach feineren Unterscheidungen auf 14 erweiterte.[19]

[16] Reis, S.38; Cromwell, S. 319f.
[17] Cromwell nennt Robert Hooke (1635-1703), Christiaan Huygens (1629-1695) und Domenico Guglielmini (1655-1710), S. 319
[18] Reis, S.47
Reis geht auch ausführlich auf die im 20. Jahrhundert entdeckten Quasikristalle mit 5-zähliger Symmetrie ein.
[19] Cromwell, S.321

1.6 Mengenlehre

Als Evgraf Fedorov (1853-1919) und Arthur Moritz Schönflies (1853-1928) auch indirekte Symmetrien in die Betrachtung miteinbezogen und die Symmetrieklassen mit Bravais' Raumgittern kombinierten, erhielten sie die 230 Raumgruppen. Schönflies war dabei einem mengentheoretischen Ansatz gefolgt; neben diesen Untersuchungen zur Klassifikation der Kristalle und von diesen beeinflusst hatte sich nämlich ein neues Gebiet der Mathematik herausgebildet, die Mengenlehre.
Jede Gruppe von Objekten, die sich isomorph zu der Struktur einer bestimmten Menge verhält, ist eine ‚Repräsentation' dieser Gruppe. Symmetriegruppen von Kristallen und sonstigen Polyedern erfüllen quasi „von alleine" diese Bedingungen.[20] In der Mathematik wurde auch die Bedeutung der Symmetrie des Iksoaeders, die in der Kristallographie wegen ihrer 5-Zähligkeit praktisch keine Rolle spielte, entdeckt, als Felix Klein 1884 seine Abhandlung *Über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade* veröffentlichte.
Beide Gebiete, die Topologie und die Mengenlehre, haben sich seitdem zu wichtigen eigenständigen Gebieten der Mathematik entwickelt, die immer noch fruchtbar sind und auch in der modernen Physik und Chemie zahlreiche Anwendungen finden.

Die Formen der regelmäßigen Polyeder finden sich an verschiedenen Stellen in der belebten Natur, z.B. in der Form mancher Viren, Radiolarien, Pollen und Algen; meist kann das auf einige ihrer praktischen Eigenschaften, vor allem ihre Stabilität, zurückgeführt werden[21]. Diese Eigenschaften und auch einige Beziehungen der Körper untereinander werde ich weiter unten im Zusammenhang mit Buckminster Fullers Arbeiten weiter beleuchten. Ihre Symmetrie, die als Perfektion, oder zumindest als ein hohes Maß an Perfektion interpretiert werden kann, verhalf ihnen seit ihrer ‚Entdeckung' immer wieder zu prominenten Rollen in der Interpretation der Welt durch Philosophen und Naturwissenschaftler und ebenso zu Auftritten in der bildenden Kunst, einerseits als Spielzeug der perspektivischen Darstellung und andererseits als Beispiele für Ordnung und Eleganz.

2.0 Philosophische Deutung

2.1 Platon

Das prominenteste Beispiel aus der Welt der Philosophie ist natürlich Platon, der ihnen in dem Dialog *Timaios* zusprach, die Grundbausteine aller Materie zu sein. Seine Darstellung beginnt mit Feststellung der Güte Gottes, aus der folgt, dass Gott bei der Erschaffung der Welt anstrebte, dass alles gut und nichts schlecht sei. Ordnung sei besser als Unordnung, das Vollkommene Vorbild bei der Erschaffung der Welt, und deshalb habe der Gott „alles, was sichtbar war und keine Ruhe hielt, sondern in ungehöriger und ordnungsloser Bewegung war" in den Zustand der Ordnung überführt.[22]Die Welt sei von Gott kugelförmig geschaffen, „die vollkommenste und sich selbst ähnlichste Gestalt, indem er das Gleichartige für unendlich

---

[20] „People were using groups long before they had been formally defined. In the problems being studied, such as the symmetries of polyhedra, the axioms of a group are automatically satisfied."
Cromwell, S.318

[21] Ausführlichere Informationen zu diesem Gebiet finden sich in: Shaping Space – A Polyhedral Approach, hrsg. von Marjorie Senechal und George Fleck, Boston – Basel 1988, das mir leider erst in die Hände geriet, als ich diese Arbeit im Wesentlichen bereits abgeschlossen hatte.

[22] Plato, Werke in 8 Bänden, Hrsg. Gunther Eigler, Darmstadt 1990, Bd.7 (Dialog Timaios), S.37 ff.

schöner ansah als das Ungleichartige.“ Er unterscheidet zwischen der unvergänglichen und unwahrnehmbaren Form, die das sei, das „der Vernunft zu betrachten“ zuteil geworden sei, der „wahrnehmbaren und geborenen“, mit sinnlicher Wahrnehmung erfassbaren, und dem Raum, der allem, was ein Entstehen besäße, einen Platz gewähre und durch ein „gewisses Bastard-Denken erfassbar“ sei. Den Raum, indem alles, was werde, geboren werde, denkt Plato als „von der Gestalt all jener Formen frei“, die er in sich aufnehmen solle. Das Gebiet der Vernunft sei „stets mit wahrer Begründung verbunden“, die sinnliche Wahrnehmung unbegründet. Diese drei verschiedenen Dinge, Sein bzw. die reine Form, Raum und Werden habe es gegeben „noch bevor der Himmel entstand“.
Nun seien die Elemente Feuer, Erde, Wasser und Luft unzweifelhaft Körper, und als solche von Flächen begrenzt; die ebene Fläche aber setze sich aus Dreiecken zusammen. Die Elemente selbst aber seien wie die fünf perfektesten, von ebenen Flächen begrenzten Körper geformt[23]: Die Erde habe Würfelgestalt, da sie am unbeweglichsten sei, und der Würfel die „festesten Grundflächen“ habe, das Feuer die eines Tetraeders, da es das beweglichste und „nach allen Richtungen schneidendste und spitzeste von allen“ sei, und außerdem auch das leichteste, „da es aus den wenigsten gleichen Teilen“ bestünde. Der Luft wird nun, da sie „dieselben Eigenschaften in zweitrangiger Weise habe“, das Oktaeder, dem Wasser das Ikosaeder zugeordnet. Das Dodekaeder bleibt übrig und wird der Form der Himmels zugeordnet – eine Äußerung, die sich wohl auf die Anordnung der Tierkreiszeichen bezieht, schließlich ist die Form des Universums bereits als eine Kugel bestimmt worden.

2.2 Ein Universum ineinander verschachtelter Polyeder

Kepler führte Platons Interpretation weiter aus und maß selbst diesen fünf Körpern in seiner Kosmologie einen bedeutenden Platz zu:
Er entwarf ein Modell unseres Sonnensystems, in dem die Bahnen der damals bekannten Planeten, die zu dem Zeitpunkt noch für kreisförmig gehalten wurden, auf Kugeln bzw. Sphären liegen, die ihrerseits wiederum der Außenkugel jeweils eines platonischen Körpers entsprechen. Diese sind auf solch eine Art und Weise ineinander geschachtelt, dass die Außenkugel des inneren der Innenkugel des äußeren entspricht. Die Anzahl der Abstände passte zu der Anzahl der platonischen Körper. Kepler hielt an diesem harmonischen Bild auch noch fest, als er selbst bereits die Ellipsenförmigkeit der Planetenbahnen gezeigt hatte; er modifizierte es dahingehend, dass diese Sphären nun auch eine bestimmte Dicke besitzen sollten, so dass sie weiterhin die Planetenbahnen beherbergen könnten.
Cromwell kommentiert dies wie folgt:

> „Keplers Polyedermodell des Universums entstand aus dem Bedürfnis, dessen mathematischen Entwurf zu zeigen, den Plan zu enthüllen, dem sein Schöpfer in der Konstruktion gefolgt war. In seinem Glauben daran, dass ein solcher Plan sich in harmonischen geometrischen Beziehungen ausdrücken lassen würde, die die Entscheidungen des Architekten widerspiegeln würden, folgte er der pythagoräischen Tradition. Sein Modell war ein Versuch, die Struktur des Universums zu erklären und eine einheitliche Darstellung einiger seiner Eigenschaften zu liefern. Dies war das erste Mal, dass solch ein System vorgeschlagen worden war. Er glaubte nicht daran, dass die Polyeder und kristallenen Sphären tatsächlich im Raum existierten; er dachte sie sich eher als ein unsichtbares Gerüst, als Teil des perfekten Entwurfs, der jedem Planeten seinen eigenen Bereich des Weltraums zuordnete.“[24]

[23] Es wird davon ausgegangen, dass Theaetetus ein Schüler Platons war und Platon daher, wenn auch nicht selbst dermaßen versiert in der Geometrie, Theaetetus’ Konstruktion und Beweis kannte.
[24] Cromwell, S. 148

2.3 Buckminster Fuller

R. Buckminster Fullers (1895-1983) Kuppelkonstruktionen[25] bescherten ihm etwas öffentliche Aufmerksamkeit, seinen utopischen Plänen für die Zukunft der Menschheit wurde gelauscht wie bezaubernden Märchen, und die akademische Wissenschaft ehrte ihn posthum mit der Namensgebung der 1985 entdeckten Fullerene (Kohlenstoffmoleküle, deren Struktur der seiner Kuppelbauten stark ähnelt).Getrieben von einer Art ‚autonomen Empirismus' und bar einer abgeschlossenen Berufs- oder wissenschaftlichen Ausbildung[26] schwor er sich, wirklich für sich selbst zu denken und versuchte, so etwas wie eine ultra-empirische Geometrie zu errichten.[27]

2.31 Erste Erfahrungen mit Geometrie

Die Definitionen von Punkt, Linie, Fläche und Würfel, die ihm in der Schule beigebracht worden waren, befremdeten ihn – ein Würfel bestehend aus Flächen ohne Dicke, zusammengesetzt aus Linien ohne jegliche Breite, zusammengesetzt aus dimensionslosen, also nicht existierenden Punkten. Fuller kommentierte diese Geometrie wie folgt: Da der Würfel, den seine Lehrerin ihm gerade vorgestellt hatte, weder ein Gewicht besaß, noch eine Temperatur, noch eine Lebensdauer, und da sein leerer, aus zwölf Kanten aus nicht existierenden Linien bestehender Rahmen seine Form nicht einmal selbst halten konnte, war es geradezu absurd unmöglich, ihn vorzuführen, und damit war er ein heimtückisches Werkzeug für Schüler und Studenten, nützlich nur für das Spiel der vorsätzlichen Selbsttäuschung.[28] Er folgert, dass diese anerkannte Vorstellung von Dreidimensionalität ausgesprochen unwissenschaftlich sei, da sie dem Lexikonbegriff von Wissenschaft als „systematisiertes Wissen, gewonnen aus Beobachtung und Studium" nicht entspreche, sondern willkürlich gesetzt sei.

2.32 Eigene Theorien

Fuller versucht es besser zu machen. ‚Besser' bedeutet für ihn, tatsächlich existierende Objekte zu beobachten, ihr Verhalten aufzuzeichnen und von diesen Beobachtungen seine mathematischen Prinzipien abzuleiten. Er äußert, reine Prinzipien seien anwendbar, könnten von der Theorie auf die Praxis reduziert werden[29]. Mit der Packung von Kugeln in der Ebene

---

[25] Gemeint sind die geodätischen Dome wie z.B. der amerikanische Pavillon auf der Weltausstellung von 1967 in Montreal. Dazu Carsten Krohn in: Buckminster Fuller und die Architekten, Berlin 2004, S.38: „Aus zahlreichen dreieckigen Verbindungen lassen sich kugelförmige Hüllen bauen, so dass mit dem geringsten Einsatz von Material der größte Raum umbaut wird." Natürlich sind diese Dome keine Kugeln; sie sind im Wesentlichen von der Struktur des Ikosaeders und/oder des Dodekaeders abgeleitet und je nach Anforderung halbkugelförmig oder mehr gestreckt – Kuppeln eben.

[26] Obwohl er 1913 von der Harvard University aufgenommen wurde, und somit alle Möglichkeiten gehabt hätte. Doch war sein Aufenthalt dort kurz und turbulent: Nach seinem ersten Studienjahr verprasste er das Geld für das zweite, brach sein Studium ab und arbeitete für kurze Zeit in einer Firma von Bekannten seiner Eltern; wurde im Jahr drauf ein zweites Mal aufgenommen, nach kurzer Zeit aber erneut exmatrikuliert, dieses Mal wegen ‚wiederholter Unverantwortlichkeit' und ‚mangelndem Interesse für die formalen Lehrinhalte' der Universität. Robert W. Marks, The Dymaxion World of Buckminster Fuller, New York 1960, S.16 f.

[27] R. Buckminster Fuller, E.J. Applewhite, Synergetics - Explorations in the Geometry of Thinking, Sebastopol 1997 (1975), §100.102

[28] Fuller/Applewhite, § 986.028

[29] Fuller/Applewhite, § 220.23
Dass das so holperig klingt, liegt daran, dass Fuller nicht nur versuchte, die Mathematik bzw. Geometrie von Grund auf neu zu entwickeln, sondern sich auf ähnliche Weise Gedanken um seine Sprache machte, was zu

experimentierend[30] stellt er fest, dass die hexagonale Anordnung der höchsten Dichte entspricht und das regelmäßige Sechseck außerdem das einzige regelmäßige Polygon ist, dessen Seiten genauso lang sind wie der Abstand der Ecken zum Mittelpunkt. Im Raum lassen sich drei Kugeln am engsten in Form eines Dreiecks, vier in Form eines Tetraeders packen. Um eine Kugel als Kern gruppiert ergibt sich aus der engsten Packung von zwölf weiteren Kugeln ein Kuboktaeder, gedacht jeweils als bestehend aus den Verbindungslinien der Kugelmittelpunkte. Für dieses Kuboktaeder gilt, analog zum Sechseck, dass die Länge der einzelnen Kanten mit dem Abstand der einzelnen Ecken zum Mittelpunkt identisch ist. Fuller nannte es auch das ‚Vektorengleichgewicht'[31]. Wird dieses Kuboktaeder mit weiteren Schichten gleichgroßer Kugeln umhüllt, bleibt die Form erhalten, nur die Anzahl der Kugeln, deren Reihe eine Kante bildet, wird erhöht. Letztere bezeichnet Fuller als die Frequenz des Kuboktaeders. Werden alle Kugeln außer der äußersten Schicht aus diesem Gebilde entfernt, formiert es sich neu zu einem Ikosaeder. Die Frequenz der Kanten bleibt erhalten, nur die Packung der Kugeln in den quadratischen Seiten des Kuboktaeders, die keine hexagonale, sondern eine kubische ist, verrutscht hin zur hexagonalen Packung. Die Anzahl der Kugeln pro Seite bleibt gleich.
Ebenso wendet er sich dem Verhalten von „Perlen an einer Kette“ zu, wobei die Perlen bei ihm stabförmige Rohre sind. Die einzige stabile Konfiguration dieser Rohre in der Ebene ist das Dreieck – jedes andere Polygon lässt sich durch Modulation der Winkel zu einem Dreieck verformen, ohne dass der Umfang verändert oder eine Seite ‚zerbrochen' werden müsste. Entsprechend verhalten sich aus Stäben mit beweglichen Ecken konstruierte (regelmäßige) Polyeder: Die Konfigurationen, deren Seiten Dreiecke sind (Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder), sind stabil, behalten ihre Form auch ohne äußere oder innere Unterstützung bei, die übrigen (Kubus und Dodekaeder) kollabieren. Ihr Kollaps kann verhindert werden, wenn ihre Seiten ihrerseits in Dreiecke aufgeteilt werden. Dieser Prozess der Aufteilung in Dreiecke ist bei Fuller praktisch eine der wichtigsten Operationen überhaupt, wenn es um die Konstruktion stabiler Strukturen geht, und bei den meisten seiner Bauten zu entdecken.[32]

2.33 Ein diskontinuierliches Universum aus vibrierenden Tetraedern

Was sind *wirklich* existierende Objekte? Fuller ruft die moderne Wissenschaft in den Zeugenstand, die nirgends so etwas wie ‚feste Materie', gerade Punkte, ebene Flächen gefunden habe, und kommt zu dem Schluss, dass die allgemeine Vorstellung von festen Dingen und anderen Kontinuitäten unangemessen sei und durch den Begriff des Energieereignisses („energy event“) sinnvoll ersetzt werden könne. Einen Punkt fasst er als ein Tetraeder von vernachlässigbarer Höhe und Basis auf[33]. Alle physikalischen Linien

---

seiner eigenwilligen Ausdrucksweise führte. Diese ist in der Lage, seine Gedanken recht präzise auszudrücken, aber teilweise sehr schwer zu übersetzen:
“Pure principles are usable. They are reducible from theory to practice.”
Carsten Krohn geht in seinem Urteil ein wenig weiter:
„Dieses tausendseitige Hauptwerk[Synergetics] bezeichnen selbst Fuller-Spezialisten als unlesbar und unverständlich.“ Krohn S.10

[30] Eine weitere Parallele zu Kepler, der sich in seiner Schrift vom sechseckigen Schnee ebenfalls bereits mit dem Problem der engsten Kugelpackung beschäftigt.

[31] ‚vector equilibrium' im Englischen

[32] „triangulation“ im Englischen

[33] Fuller/Applewhite § 100.032
“A point-to-able something may be much too small to be optically resolved into its constituent polyhedral characteristics, yet be unitarily differentiated as a black speck against a white background. Because a speck existed yet defied their discernment of any feature, mathematicians of the premicroscope era mistakenly assumed a speck to be self-evidently unitary, indivisible, and geometrically employable as a nondimensional "point".”
“point-to-able something” ist eine der Wortschöpfungen von Fuller, die nur durch den Zusammenhang erklärt

entpuppten sich bei näherer Betrachtung als gewellt oder fragmentiert, aber es gäbe Kräfte, und diese könnten mit Vektoren dargestellt werden.[34] Diese seien Tetraeder mit vernachlässigbarer Basis, aber signifikanter Höhe. Aber es ist nicht so, dass Fuller hier durch die Hintertür wieder gerade Linien einführt: Er besteht darauf, dass potentielle ‚gerade' Beziehungen sofortige Wirkung bzw. Ereignisse in ‚Nicht-Zeit' erfordern würden und deshalb zumindest nicht ‚vorführbar' seien.[35]Sich wieder an die Anschauung haltend können für Fuller keine zwei ‚Linien' oder Vektoren zur selben Zeit durch denselben Punkt gehen. Seine Vektoren schneiden sich nicht, sie nähern sich nur sehr nah aneinander an und entfernen sich wieder voneinander. Eine Fläche sei ein Tetraeder mit vernachlässigbarer Höhe aber einer Basis von signifikantem Ausmaß. Da Polyeder von ihm immer als Gerüst gedacht werden, nimmt er auf die Seiten von Polyedern auch häufig als ‚Öffnung' Bezug. Tatsächlich werden von ihm gerade Flächen grundsätzlich als Öffnungen aufgefasst. Oberflächen müssten statt als kontinuierliches Etwas ohne Dicke als ein durch ein feines Netzwerk von kleinen Vektoren verbundenes Geflecht von Energieereignissen begriffen werden und sind damit nicht mehr ‚eben'.
Die entscheidende Eigenschaft, die bestimmt, ob wir etwas als Kontinuität oder als eindeutig separat wahrnehmen (wie z.B. Planeten im Gegensatz zu Atomen), sei die Frequenz. Wenn die Frequenz eines Geflechts so hoch wird, dass sie sich unserer Wahrnehmung entzieht, nehmen wir es als Kontinuität wahr, wird sie so gering, bzw. die Abstände so groß, dass sich ihre Wiederholung unserer Wahrnehmung entzieht, nehmen wir auch zusammenhängende Ereignisse als separat wahr. Größe wird als Frequenz in Bezug auf eine spezifische Vergleichsgröße ausgedrückt.

2.34 Das Koordinatensystem der Natur ist nicht rechtwinklig?

Fuller geht es nicht nur um eine ‚praktische' Geometrie, er versucht der Natur selbst auf die Schliche zu kommen.[36] Trotz des völlig anderen Ansatzes, gibt es Parallelen zu Platon und Kepler, wie sie ist er fasziniert von der Vorstellung, dass sich die Beziehungen verschiedener Bestandteile des Universums in harmonischen Verhältnissen ausdrücken lassen, ja, dass dem Ganzen eine harmonische Ordnung innewohnt.
Seine Experimente enthüllen keine großartigen neuen Erkenntnisse, aber Fuller zieht seine eigenen Schlüsse. Davon ausgehend, dass sich die natürlichen belebten und unbelebten Strukturen auf in höchstem Maße effektive Art und Weise bilden, d.h. so, dass zu ihrer Aufrechterhaltung nur ein absolutes Minimum an Energie notwendig ist, erhebt er das Tetraeder, nach ihm die Form, die mit minimalem Aufwand ein Maximum an Stabilität besitzt, zu dem zentralen Baustein des Universums. Des Weiteren annehmend, dass der Raum an sich keine formlose Leere sei, in der alles möglich ist[37], macht er sich auf die Suche nach

---

werden.
§ 240.10
"There are no indivisible points."
[34] Amy C. Edmonson, A Fuller Explanation – The Synergetic Geometry of R.Buckminster Fuller, herausgegeben von Arthur L. Loeb, Boston – Basel – Stuttgart 1987, S.8
[35] Fuller/Applewhite § 240.21
"Potentially straight-line relationships require instantaneity or actions in no-time; therefore, straight lines are nondemonstrable."
[36] „natures own coordinate-system"
[37]"...K.J.Dormer illustrates the geometrical similarity of the inner tissue from the shaft of a bird feather and the fruit flesh of a crab apple. Although these cells differ both biologically and chemically, considered as geometric patterns they are almost interchangeable. How is it that physical and biological systems that are influenced by such different external forces, nevertheless end up with similar patterns? Smith feels that at the scale of this

dem „Koordinatensystem der Natur.“ Edmonson schreibt dazu: „Das ‚Koordinatensystem der Natur’ ist also eine Geometrie von ökonomischsten Beziehungen, die alle Strukturen beherrschen.“[38]
Die Bedingungen, die dieses Koordinatensystem erfüllen müsste, schienen Fuller klar: bestehend aus einem in alle Richtungen gleichen, also symmetrischen Muster aus gleichlangen Vektoren, die überall gleichstarken Kräfte repräsentierend, sich radial ausbreitend, die sich alle im gleichen Winkel an den Treffpunkten treffen, und sich auf diese Weise in einem Gleichgewicht befinden[39]. Er kam auf eine Struktur, bestehend aus einem Gitter sich jeweils an ihren quadratischen Seiten berührender Kuboktaeder mit oktaederförmigen Zwischenräumen. Verbindet man bei der unendlichen engsten Kugelpackung wieder die Kugelmittelpunkte angrenzender Kugeln mit Vektoren und lässt die Kugeln selbst anschließend weg, erhält man dasselbe Gitter. Einer seiner auffallendsten Unterschiede zum kartesischen Koordinatensystem ist die Abwesenheit von rechten Winkeln; hier sind alle vorkommenden Winkel einfache Vielfache von 60°. Eine Anordnung von Verstrebungen nach diesem Muster[40] erzielt sowohl in Form eines Mastes als auch in der Ebene z.B. als Gerüst einer Tragfläche ein erstaunlich hohes Maß an Stabilität.
Fuller nennt das die ‚isotropische Vektormatrix’ und behauptet, alle Entwicklungen spezifischer Ereignisse im Universum, könnten mit ihrer Hilfe im Voraus berechnet werden. Diese Berechnungen müssten im Wesentlichen damit begonnen werden, dass das betroffene Gebiet mit einem passend dimensionierten gedachten Bezugsrahmen in Form des Vektorengleichgewichts versehen werden, und die Punkte, von denen die Störungen des Gleichgewichts ausgehen, deren Richtung und deren Energie erfasst werden.[41]
Er schreibt, seine auf diesem experimentellen Wege erzeugte Mathematik zeige wie man ‚omnirational’, energetisch, arithmetisch, geometrisch, chemisch, stereometrisch, kristallografisch, in Bezug auf Vektoren, topologisch und in Bezug auf Energiequanten in Begriffen des Tetraeders messen und berechnen könne.[42]‚Omnirational’ ist ein Begriff, den er sehr häufig verwendet, in ihm spiegelt sich seine ausgesprochene Abneigung gegen irrationale Zahlen und der Umstand, dass sie in seinem System kaum eine wichtige Rolle spielen.[43]

---

phenomena, it is the geometric constraints on space that are the controlling factor rather than external forces that determines form [1954], [Dormer, 1980].”
Jay Kapraff, Connections – The Geometric Bridge Between Art and Science, Singapore 2001 (erstmalig erschienen 1990), S.215

[38] Edmonson S.10

[39] Fuller/Applewhite § 260.34
“The XYZ coordinates of parallels and perpendiculars have nothing to do with the way Universe is operating. Universe is operating in radiational-divergence and gravitational-convergence.”

[40] Fuller nannte es den ‚octet truss.’

[41]Fuller/Applewhite § 240.39

[42]Fuller/Applewhite § 201.01

[43] So vermeidet er Pi z.B. indem er mit Demokrit darin übereinstimmt, dass es keinen perfekten Kreis ‚in der Wirklichkeit’ gibt, sondern nur Polygone mit sehr kleinen Seiten bzw. sehr hoher Frequenz, die man ihrerseits natürlich wieder als aus Dreiecken zusammengesetzt betrachten kann.
“He (Democritus) is said to have regarded a sphere as being really a polyhedron with imperceptible small faces. This idea is probably connected with the atomic theory of matter rather than space. A material sphere composed of indivisible atoms would presumably have this property; a mathematical sphere is an ideal object with a perfectly smooth curved face. The distinction between mathematical objects and their imperfect material counterparts was discussed by Plato (...) but was certainly known earlier.”
Cromwell, S.35
Fuller verneint diese Unterscheidung ganz bewußt.
Fuller/Applewhite § 201.03:
„Synergetics makes possible a rational, whole-number, low integer quantation of all the important geometries of experience because the tetrahedron, the octahedron, the rhombic dodecahedron, the cube, and the vector equilibrium embrace and comprise all the lattices of all the atoms“.
Edmonson, S. 18:

‚Energetisch' ist in seiner Terminologie der Gegensatz zu ‚synergetisch', das Ganze betreffend, bedeutet also soviel wie ‚den Einzelfall', ‚den konkreten Fall' betreffend.

2.35 Jitterbug, oder: tanzende Polyeder

Fuller legte in seiner Betrachtung regelmäßiger Polyeder ein besonderes Gewicht auf ihre Beziehungen untereinander und die Möglichkeiten, sie ineinander zu überführen. Auch waren diese Körper oder Gebilde für ihn vor allem wegen einiger ihrer praktischen Eigenschaften von Interesse. Die besondere Stabilität des Tetraeders habe ich bereits erwähnt; das Ikosaeder war für Fuller deshalb wichtig, weil es, in Abwesenheit von tatsächlichen Kugeln, die Form ist, die mit der geringsten Oberfläche das größte Volumen umfasst. Das Oktaeder sah er irgendwo dazwischen, den Würfel akzeptierte er nicht als selbstständige ‚Struktur', da er nicht aus Dreiecken besteht, ebenso das Dodekaeder. Besonders stolz war er auf die Entdeckung der Möglichkeit, die Form, die er das Vektorengleichgewicht nannte, schrittweise zu anderen Formen zusammen zu falten: Das Kuboktaeder, das selbst aufgrund seiner quadratischen Seiten keine besonders stabile Konfiguration ist, klappt über den Umweg der Form einer Ikosaeders, dem einige Kanten, aber keine Ecken fehlen, zu einem Oktaeder zusammen, das sich zu einem viergeteilten Dreieck umformen lässt, das wiederum so ‚geknickt' werden kann, dass die vier Flächen die Seiten eines Tetraeders ergeben. Fuller nannte dies die ‚Jitterbug-Transformation'. In Fullers Betrachtungen fällt das Ikosaeder, wie in der Kristallographie, etwas aus dem Rahmen: auch seine isotropische Vektormatrix ‚erlaubt' nur 2-, 3-, 4- und 6-zählige Symmetrien, und im Gegensatz zu den anderen platonischen Körpern, deren Volumen sich recht elegant in ganzen Zahlen in Bezug zu einem als Einheit verstandenen Tetraeder ausdrücken lässt (z.B. hat das Kuboktaeder das 20-fache Volumen eines Tetraeders mit gleichlangen Seiten, das Oktaeder das 4-fache, das Rhombendodekaeder das 6-fache)), beträgt dieses Verhältnis beim Ikosaeder 18.51 zu 1. Fuller, dem seine ‚wunderschönen' einfachen ganzen Zahlenverhältnisse einiges bedeuten, beschäftigt dies, und er versucht diesem Umstand irgendeine Bedeutung abzugewinnen, indem er auf das Massenverhältnis von Elektron zu Neutron, das ebenfalls 18.51:1 beträgt, Bezug nimmt. Das Rhombendodekaeder taucht bei ihm als die Form des Nukleus seines Vektorengleichgewichts auf: die zwölf Seiten entsprechen den zwölf von ihm ausgehenden Vektoren, so dass je ein Vektor dem Mittelpunkt einer Seite des Rhombendodekaeders entspringt. Außerdem fällt ihm auf, dass das Rhombendodekaeder von allen halbwegs regulären raumfüllenden Körpern, also Körpern, die, wenn man mehrere Exemplare entsprechend stapelt, keine Lücken lassen, dasjenige ist, das mit der geringsten Oberfläche das meiste Volumen; in Fullers Denken ist es damit die ökonomischste Raumfüllung.

2.36 Weitere Eigenschaften regelmäßiger Polyeder

Mit dem ‚Zusammenfalten' von Polyedern hatte sich meines Wissens nach vor Fuller wirklich noch niemand beschäftigt, aber zwei andere Operationen, die mit ihnen vollzogen werden können, sind schon länger bekannt[44]: das Kappen der Ecken und das Aufsetzen von Pyramiden auf die Seiten. Wendet man ersteres entsprechend regelmäßig auf die fünf Platonischen Körper an, erhält man die bereits erwähnten Archimedischen Körper, letzteres führt zu der Gruppe der Sternpolyeder. Diese Operationen stehen in einem Zusammenhang mit dem Phänomen der ‚Dualität', das in Grundzügen schon den alten Griechen bekannt war:

"In synergetics, area and volume are presented as quantities that can be counted, as opposed to measured and described as a continuum".

[44]Reis, S.111f.

Zwei regelmäßige Körper sind zueinander dual, wenn die Anzahl der Flächen des einen der Anzahl der Ecken des anderen entspricht und umgekehrt. Bei den Platonischen Körpern verhalten sich so Oktaeder und Kubus zueinander, ebenso wie Dodekaeder und Ikosaeder. Das Tetraeder kann als sein eigenes Dual angesehen werden. Zwei Körper, die sich so zueinander verhalten, besitzen dieselbe Symmetrie, was in der Kristallographie von Belang ist, und können ineinander einbeschrieben werden, so dass die Ecken des einen die Mittelpunkte der Seiten des anderen berühren. Davon kann abgeleitet werden, dass die dualen Körper zu den Archimedischen Körpern gleiche, aber nicht unbedingt gleichseitige und gleichwinklige Seiten haben, und dafür aber ungleiche Ecken. Woraus wiederum folgt, dass sie im Gegensatz zu den Archimedischen Körpern zwar keine Außenkugel, aber eine Innenkugel haben.

Kappt man die Ecken zweier dualer Körper so, dass sich die an Stelle der Ecken neu entstehenden Flächen berühren, entsteht aus beiden alten der gleiche neue Körper. Ebenso verhält es sich mit dem Aufsetzen von Pyramiden: Wählt man die Höhe der Pyramide so, dass die aneinander angrenzenden Seiten benachbarter Pyramiden eine neue Ebene ergeben, so entsteht durch die Anwendung dieser Operation auf die zwei dualen Körper wieder bei beiden der gleiche neue Körper.[45] Diese Beziehungen lassen sich noch weiter ausführen: Wendet man auf ein und denselben Körper sowohl die Kappung der Ecken, bis sich die neu entstandenen Flächen treffen, als auch das Aufsetzen von Pyramiden, so dass zwei angrenzende Seiten verschiedener Pyramiden eine ebene Fläche ergeben, an, so sind die zwei neu entstandenen Körper zueinander dual. Für Fuller ein weiteres Beispiel der ‚Intertransformabilität'[46] dieser Strukturen.

3.0 Zusammenfassung

Von Euklid über Platon zu Fuller wird deutlich, dass die Wahrnehmung von Symmetrien sowohl auf philosophischer Ebene sehr verschieden gedeutet worden, als auch unter sehr unterschiedlichen Aspekten wissenschaftlich untersucht worden ist. Wo die regelmäßigen Körper bei Platon als Beispiele der ewigen, zeitlosen Ideen und der Ordnung im Universum, als Gegensatz zur ungehörigen Bewegung herhalten müssen, betrachtet sie Fuller als exemplarisch für die vielfältigen Energietransformationsprozesse, aus denen für ihn das Universum besteht, und benennt eine solche Transformation nach einem Modetanz, während Kepler sie als immaterielle Ordnungsprinzipien interpretiert, und Escher wieder an Platon gemahnt, wenn er von der geradezu jenseitigen Symmetrie angezogen wird, die für ihn einen so deutlichen Kontrast zum Chaos der übrigen Welt darstellt. Wo die Topologie sich in auch mehr als drei Dimensionen mit jenen Eigenschaften der Polyeder beschäftigt, die erhalten bleiben, wenn man sie krümmt, und sie auf eine Struktur aus Ecken und Kanten reduziert, verabschiedet sich die Kristallographie von eben diesen ‚oberflächlichen' Merkmalen der Polyeder und konzentriert sich auf die deren kleinsten Bestandteilen inhärenten Symmetrien, was schließlich zur Gruppentheorie führt. Fuller kümmert sich weder sehr um die einen noch die anderen und kombiniert doch beides in seinem Studium der Strukturen, mit denen sich in seinen Augen die Welt am besten beschreiben lässt, und hat erstaunlicherweise in seinen Ansichten über die Bedeutung des Dreiecks eine Gemeinsamkeit mit Platon.

[45] Arthur Loeb, Space Structures – Their Harmony and Counterpoint, Reading 1976, zitiert nach Edmonson S.45 f.
[46] ‚Intertransformability' im Englischen

3.1 Nachtrag: Verschiedene Auffassungen von Wissenschaft bzw. dem Zusammenhang von Geometrie und physikalischer Wirklichkeit

Fuller fällt in der Wissenschaftsgeschichte aus dem Rahmen, ist eine Randfigur. Man kann sich streiten, ob man ihn überhaupt als Wissenschaftler betrachten sollte, und klar ist, dass seine Vorstellungen von Mathematik sich stark von gängigen Vorstellungen unterscheiden. Man könnte ihn sogar als einen Rückfall in eine prä-griechische Auffassung von Mathematik betrachten:

A. Szábo meint, dass Euklids *Elemente* noch die Spuren eines Prozesses der Verdrängung visueller und empirischer Methoden aus der griechischen Mathematik trägt, was umso bedeutungsvoller ist als das altgriechische Wort für Beweis ursprünglich „zeigen“ bzw. „sichtbar machen“ bedeutet hat. Ihm scheint Euklid diese ursprünglichen Methoden bewusst vermieden zu haben, um seine Beweise so allgemeingültig wie möglich zu halten.[47] Szábo bringt diese Entwicklung der griechischen Mathematik mit der eleatischen Philosophie in Verbindung, die mit indirekten Argumenten einige ihrer zentralen Doktrinen verteidigte wie: Es gibt keine Bewegung, keine Veränderung, kein Werden, kein Vergehen, keinen Raum und keine Zeit.[48]Indirekte Beweise, in denen nicht direkt bewiesen wird, was bewiesen werden soll, sondern gezeigt wird, dass die Annahme des Gegenteils zu einem Widerspruch führt, spielen seit damals eine wichtige Rolle in der Mathematik. Die von manchen geäußerte Vermutung, dass die Griechen grundsätzlich so viel von den Babyloniern übernommen hätten, dass ihre Vorreiterrolle in der Mathematik in Frage gestellt werden müsste, verneint er vehement mit dem Hinweis darauf, dass aus der Zeit vor den Griechen kein Beweis überliefert sei; Sätze oder ‚Theoreme’ seien vorher höchstens numerisch verifiziert worden. Der entscheidende Unterschied sei, dass die griechische Wissenschaft ein überragendes System logischer Schlussfolgerungen aus wenigen Axiomen gewesen ist, während die vorherigen Hochkulturen nicht mehr als eine Sammlung von Daumenregeln hervorgebracht haben.[49] Die Griechen emanzipierten die Geometrie von ihrer ursprünglichen Bedeutung als der Kunst der Landvermessung[50] zu einer unerreicht ‚reinen’ Wissenschaft, einem Gebiet der Vernunft, das um seiner selbst willen betrieben wurde und in dem direkte Bezüge zu mechanischen oder physischen Wirklichkeiten verpönt waren[51]. Manche betrachten Platons Philosophie in dieser Hinsicht als prägend – so soll Euklid, dessen Bedeutung nicht bestritten werden kann, Schüler von Platon gewesen sein.[52] Das streng logische Ableiten von als

---

[47] A. Szábo, The Beginning of Greek Mathematics, Budapest 1978
S. 189, S. 194 und S.197:“At some time during the pre-Euclidean period, Greek mathematics underwent a remarkable transformation. ... I think that this ‘transformation’ can best be described as *anti-empirical* and *anti-visual*.”

[48]Szábo, S.218

[49]Szábo, S.157, zitiert O.Becker, 'Frühgriechische Mathematik und Musiklehre', Trossingen 1957:
"It is not even certain that the Babylonians knew how to formulate general theorems. (...)*Proofs* do not appear in any of the ancient Oriental texts known to us. At best one sometimes comes across numerical verifications.”
S.186, Szabó zititert Fritz (K. von Fritz 1955):
"There is absolutely no evidence to suggest that the Babylonians, not to mention the Egyptians, ever tried to deduce mathematical theorems rigorously from first principles."

[50]Marvin Jay Greenberg, Euclidean and Non-Euclidean Geometries – Development and History, San Francisco 1980, S. 1

[51] „Why might not geometry have been developed as an experimental science? Why should we feel any more obliged to give a logical demonstration of a geometrical fact than we do of a physical one? […] I have seen no adequate explanation of this phenomenon. The best we are able to do is to explain it by the peculiar mentality of the Greeks of classical times. The Greek philosophers were not at all interested in mathematics for any practical applications, but for their relation to absolute truth.”
Julian Lowell Coolidge, A History of Geometrical Methods, Nachdruck der Dover-Ausgabe von 1963, Mineola, Mineola 2003

[52]Benoit B. Mandelbrot, Fraktale und die Wiedergeburt der experimentellen Mathematik, in:
Peitgen/Jürgens/Saupe, Bausteine des Chaos – Fraktale, Stuttgart 1992, S.6-9

unbezweifelbar betrachteten Axiomen schien sicher zu neuen Wahrheiten zu führen. Ins Wanken geriet dieser Glaube erst mit der Entwicklung der nichteuklidischen Geometrien im 19. Jhd.. Aus dieser Grundlagenkrise der Mathematik, die dazu führte, dass die formale Logik grundsätzlich neuen Untersuchungen unterzogen wurde[53], gingen verschiedene Ansichten über den Zusammenhang von Mathematik, Wahrheit und Welt im Allgemeinen und - verstärkt durch Einsteins Relativitätstheorie Anfang des 20. Jhd. - den Zusammenhang zwischen geometrischem Raum und physikalischem Raum im Speziellen hervor bzw. schien der physikalische Raum plötzlich nicht mehr so gefügig Platons Vorstellung von Formlosigkeit zu entsprechen. Greenberg äußert, Raum werde nicht länger als von den in ihm existierenden Objekten unbeeinflusst angesehen, und weder die euklidische noch die Geometrie von Lobachevsky – als ein Beispiel einer nichteuklidischen - entsprächen unserer gegenwärtigen Vorstellung von Raum. Er zitiert Poincaré, der die Ansicht vertritt, die Axiome entsprächen Konventionen, der Wahrheitsgehalt der aus ihnen abgeleiteten Geometrien sei ausschließlich von deren Widerspruchsfreiheit abhängig und unabhängig von der Frage welche sich besser zur Beschreibung der physischen Welt eigne; und Jean Dieudonné damit, dass der Glaube, mathematische Objekte seien im wesentlichen die Ideen (im Platonischen Sinn) der Objekte der wirklichen Welt, unhaltbar geworden sei, und es inzwischen vielmehr den Anschein habe, dass Mathematik und physische Realität fast vollständig unabhängig voneinander seien, ja, dass eher deren Berührungspunkte ein Rätsel darstellten.[54] Aber auch die entgegen gesetzte Ansicht: „Geometrie ist Physik und damit von kosmischer Wichtigkeit“[55], wird noch vertreten.
Nur vor diesem Hintergrund wird verständlich, wie sehr Fuller aus dem Rahmen fällt. Seine Äußerungen zu dem Thema sind noch extremer als die von der ‚kosmischen Wichtigkeit' von Geometrie; er nimmt zwar gewissermaßen wie Platon einen höheren Wirklichkeitsgrad der mathematischen Prinzipien an, da Prinzipien im Gegensatz zu ihren Manifestationen ewig seien, besteht aber darauf, dass diese Abstraktionen so direkt wie möglich von der physischen Wirklichkeit abgeleitet werden müssten – nicht, dass er anderen Vorgehensweisen in der Mathematik den Wahrheitsgehalt abspricht, er bezeichnet sie nur als irrelevant und macht sich über Axiome als ‚prämikroskopischen, künstlichen' Glauben lustig.[56] Und schließlich verweigert er sich mathematischen Beweisen, darauf bestehend, dass der einzig gültige wissenschaftliche Beweis wiederholbare physikalische Evidenz sei, also das Experiment, und verweigert sich damit sämtlichen Grundlagen der Mathematik. Ob Fullers Ansatz dennoch einen Beitrag zu irgendeiner Wissenschaft leisten kann, ob sein System einer Prüfung auf logische Kohärenz oder experimentelle Bestätigung stand hält, kann ich nicht beurteilen, nur immer wieder über die Eleganz seiner großen und kleinen Kuppelbauten staunen, die in ihrer Struktur und Gestalt so deutlich von dem Studium regelmäßiger Polyeder geprägt sind.[57]

---

und Greenberg, S.7

[53] siehe z.B. Alfred Whitehead/ Betrand Russel, Principia Mathematica – Vorwort und Einleitung, Mit einem Beitrag von Kurt Gödel, Wien/Berlin 1986
und Douglas R. Hofstadter, Gödel, Escher, Bach – Ein endloses geflochtenes Band, Stuttgart 1985

[54] Greenberg, S. 238

[55] Cornelius Lanczos, Space through the Ages – The Evolution of Geometrical Ideas from Pythagoras to Hilbert and Einstein, London 1970, Vorwort (ohne Seitenzahl)

[56] Fuller/Applewhite § 220.11, § 203.04, § 203.06

[57] "Da erst am Anfang des 21. Jahrhunderts ein Architekt explizit erklärt, dass ein Bau von ihm auf Fullers Konzepten basiere, wird die eigentliche Geschichte seiner produktiven Rezeption möglicherweise erst beginnen. Es handelt sich um den Umbau des Reichstages in Berlin." Krohn S. 44; mehr dazu in: Norman Foster, Der neue Reichstag, Leipzig – Mannheim 2000, S.135 ff.